第 15 講　命題と証明

【基礎確認事項】

［１］ 命題と真偽

□数学においては，物事の真偽が明確に定まるような文や式を**命題**という．

□命題が正しいときその命題は**真**であるといい，正しくないときその命題は**偽**であるという．

例　「7 は素数である」は真の命題

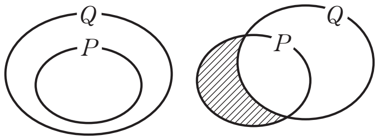
「$\sqrt{4}=-2$」は偽の命題

□命題「p **ならば** q である」を「$p \Longrightarrow q$」と表すことができる．このとき p を**仮定**，q を**結論**という．命題 $p \Longrightarrow q$ は，「仮定 p を満たすものはすべて結論 q を満たす」ということである．

□条件 p を満たすものの集合を P，条件 q を満たすものの集合を Q とすると，

命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるということは，$P \subset Q$ が成り立つ，ということである．

命題 $p \Longrightarrow q$ が偽であるということは，「p を満たすものの中に，q を満たさないものが少なくとも 1 つある」ということである．



□命題が偽であることを示すには，成り立たない例を 1 つ挙げればよい．このような例を**反例**という．

例　$x^2=1 \Longrightarrow x=1$　は偽の命題で，その反例は　$x=-1$ である．

［２］ 条件の否定

□条件 p に対し，「p でない」を条件 p の**否定**といい，$\overline{p}$ で表す．また，二重否定 $\overline{\overline{p}}$ は p と同じである．

例　条件「$p：x \geqq 0$」の否定は，「$x \geqq 0$ ではない」ことである．つまり「$\overline{p}：x<0$」である．

□条件 p，q について，次のことがいえる．

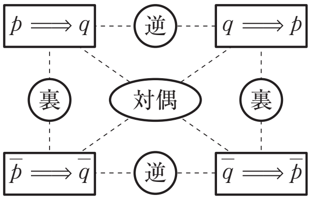
> 「p かつ q」の否定は「$\overline{p \text{ かつ } q}$」，つまり「$\overline{p}$ または $\overline{q}$」
> 「p または q」の否定は「$\overline{p \text{ または } q}$」，つまり「$\overline{p}$ かつ $\overline{q}$」

これは集合におけるド・モルガンの法則により明らかである．

⇒　C&U 1

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［3］ 命題の逆・裏・対偶



□命題 $p \Longrightarrow q$ に対して

　　$q \Longrightarrow p$ を**逆**，$\overline{p} \Longrightarrow \overline{q}$ を**裏**，$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ を**対偶**

　という．

□ある全体集合 U において，条件 p，q を満たす集合 P，Q を考えることにより，次のことがいえる．

> 命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する．

　もとの命題が真であっても，その逆や裏は必ずしも真ではない．

⇒　C&U ２

［4］ 必要条件と十分条件

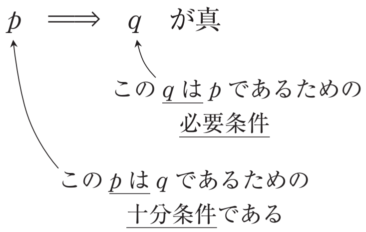
□ある 2 つの条件 p，q について，

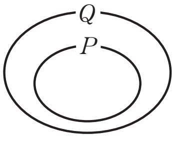
　命題 $p \Longrightarrow q$ が真であるとき

　　q は p であるための**必要条件**である

　　p は q であるための**十分条件**である

　という．





$p \Longrightarrow q$ が真

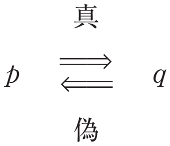
例　実数 x に関する 2 つの条件　$p：x=1$，　$q：x^2=1$　について

　$p \Longrightarrow q$ は真である．

　　よって p は q であるための十分条件である．

　$q \Longrightarrow p$ は偽である（反例：$x=-1$）．

　　よって p は q であるための必要条件ではない．



したがって，p は q であるための十分条件であるが，必要条件ではない．

同様に，q は p であるための必要条件であるが，十分条件ではない．

□命題 $p \Longrightarrow q$ が真で，かつ $q \Longrightarrow p$ が真であるとき，$\boldsymbol{p \Longleftrightarrow q}$ と表し，p は q であるための**必要十分条件**である，という．またこのとき，p と q は**同値**であるという．

⇒　C&U ３

［5］ 背理法

□命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることを証明するとき，その対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ が真であることを証明してもよい．$\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ が真とは，もとの命題 $p \Longrightarrow q$ の結論 q を否定すると，仮定 p を否定したものが必ず成立する，ということである．

□このように命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることの証明において，結論 q を否定することから始める方法として他に**背理法**がある．

例　「x，y が実数のとき，$x+y>0 \Longrightarrow x$，y の少なくとも一方は正」が真であ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ることを背理法で証明する．

　結論「x，y の少なくとも一方は正」の否定は，「x，y がともに 0 以下」である．

よって，$x \leqq 0$ かつ $y \leqq 0$ であると仮定する．

このとき　$x+y \leqq 0$　となる．これは仮定「$x+y>0$」であることに反し矛盾する．

したがって，x，y の少なくとも一方は正である．

□上の例においては，結論を否定すると，仮定に反する，つまり「仮定が否定される」こととなり矛盾を導いた．その意味では，予め仮定の否定をつくりそれを導く対偶と同じであるが，背理法においては，矛盾するのは必ずしも問題文に明記された仮定に対してだけではなく，「数学の理（ことわり）」に矛盾することを導くことで証明することができる．つまり数学における定理や原則が仮定，と大きくとらえることができる．

⇒　C&U 4

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

【CHECK & UP】

1 次の条件の否定をつくれ．ただし，a，b は実数とする．

(1) a は無理数である　　(2) $a>0$　または　$b=0$　　(3) a，b はともに正

2 命題「$x=2 \Longrightarrow x^2=4$」の逆，裏，対偶を述べ，その真偽を調べよ．また偽のときは反例を挙げよ．ただし，x は実数とする．

3 a，b が実数のとき，$ab=0$ は $a=b=0$ であるための必要条件，十分条件，必要十分条件，そのいずれでもない，のどれにあたるか．

4 n が整数のとき，命題「n^2 は偶数 $\Longrightarrow$ n は偶数」が真であることを次の方法で導け．

(1) 対偶を用いて　　(2) 背理法を用いて

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　命題と証明

1　次の［　　］に最も適するものを下の選択肢①～④から１つ選べ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$x<2$ は $x\leqq 2$ であるための［　　］.

(2)　$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための［　　］.

(3)　$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための［　　］.

(4)　$x^2\leqq 4$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための［　　］.

(5)　$x+y,\ xy$ がともに有理数であることは，$x,\ y$ がともに有理数であるための［　　］.

①　必要十分条件である　　②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない　　④　必要条件でも十分条件でもない

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ⑴　整数 n について，n^2 が 3 の倍数であるならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ．

⑵　$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ．ただし，⑴の結果を使ってよいものとする．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［1］　次の命題の真偽をそれぞれ調べよ．

⑴　すべての実数 x について，$x^2-1>0$

⑵　ある実数 x について，$x^2+x+1\leqq 0$

［2］　実数 x に関する式 $ax^2+bx+c=0$ がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　命題と証明

次の［　　］に最も適するものを下の選択肢①～④から１つ選べ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1) $x<y$ は $cx<cy$ であるための［ア］．

(2) $a>0$ は $\sqrt{a^2}=a$ が成り立つための［イ］．

(3) $ab+1=a+b$ は a，b のうち少なくとも１つは１であるための［ウ］．

(4) $a>0$ または $b>0$ であることは $a+b=1$ であるための［エ］．

① 必要十分条件である　② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない　④ 必要条件でも十分条件でもない

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　命題と証明

【CHECK & UP】

1

(1)　**a は有理数である**

(2)　**$a \leqq 0$　かつ　$b \neq 0$**

(3)　**a，b の少なくとも一方は 0 以下**

「否定」は「〜でない」という状態．それに該当する用語があればそれを用いるのがよい．「正でない」＝「負」，はよくある間違い．0 の存在を忘れてはならない．また，集合における「ド・モルガンの法則」により，否定をつくる際は「ともに（かつ）」と「少なくともどれか 1 つ（または）」の入れ替えに注意すること．ちなみに，「$a \geqq 0$」は「$a>0$　または $a=0$」である．「または」ではあるが，a が正であることと a が 0 であることは「排反事象（同時に起こらない）」である．

2

逆：$x^2=4 \Longrightarrow x=2$　　**偽（反例：$x=-2$）**

裏：$x \neq 2 \Longrightarrow x^2 \neq 4$　　**偽（反例：$x=-2$）**

対偶：$x^2 \neq 4 \Longrightarrow x \neq 2$　**真**

（命題「$x=2 \Longrightarrow x^2=4$」が明らかに真より，その対偶も真）

ある命題が「偽」であることを言うには，「反例」を 1 つ挙げればよい．ところが「真」であることを言うには，明らかに真である場合を除き「反例が 1 つも存在しない」ことを「証明」しなければいけない．よってその「対偶」が真であることを示すのが効果的である場合が少なくない．

3

$ab=0 \Longrightarrow a=b=0$　は偽（反例：$a=0$，$b=1$）

よって，$ab=0$ は十分条件ではない．

$a=b=0 \Longrightarrow ab=0$　は明らかに真

よって，$ab=0$ は必要条件である．

したがって，$ab=0$ は $a=b=0$ であるための**必要条件**である．

ある条件にスポットを当て，その条件が他の条件が成り立つための何条件であるかを判断する問題である．

自身のもつ条件を 1 つの例外（反例）もなくもう一方が受け入れられれば十分条件であり，もう一方がもつ条件を 1 つの例外（反例）なく自分が受け入れられれば必要条件である．

上で述べたように，「真」であることを言うのは難しい．よって相手が受け入れられない条件を自分がもっている，つまり反例が存在するのでは？　と疑うことから始まることが多い．

4

(1)　n が整数のとき，

命題「n^2 は偶数 $\Longrightarrow$ n は偶数」の対偶は

「n は奇数 $\Longrightarrow$ n^2 は奇数」である．

n が奇数のとき，$n=2k+1$（k：整数）とおける．

このとき $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$

$2k^2+2k$ は整数より n^2 は奇数である．

したがって対偶が真より，もとの命題も真である．

(2)　n が整数のとき，n が奇数であると仮定する．

$n=2k+1$（k：整数）とおくと，

$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1$

$2k^2+2k$ は整数より n^2 は奇数である．

よって n^2 が偶数であることに反し，矛盾する．

したがって，n は偶数である．

ある命題を示すとき，結論を否定するならば仮定も否定される，いわゆる「対偶」が真であることを示すのは有効な手段の 1 つである．それに対し，背理法は結論を否定することで「何かに矛盾を起こす」，よって結論を否定したのは間違い，つまり結論は正しいとする論法である．その何かが何なのかは問題によってさまざまである．もとの命題が $p \Longrightarrow q$ の形であれば，矛盾を起こすのは p に対してであろうが，それは「対偶」が真であることを示すことと変わらない．

結論が「〜でない」，「○または△」という形の場合に対偶や背理法が用いられることが多い．「無理数」も「有理数でない」と考えれば同様．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　命題と証明

1　次の［　　］に最も適するものを下の選択肢①～④から1つ選べ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$x<2$ は $x\leqq 2$ であるための［　　］．

(2)　$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための［　　］．

(3)　$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための［　　］．

(4)　$x^2\leqq 4$ は $\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$ であるための［　　］．

(5)　$x+y,\ xy$ がともに有理数であることは，$x,\ y$ がともに有理数であるための［　　］．

①　必要十分条件である　　②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない　　④　必要条件でも十分条件でもない

(1)「$x<2 \Longrightarrow x\leqq 2$」は明らかに真．よって十分条件である．

「$x\leqq 2 \Longrightarrow x<2$」は偽　(反例：$x=2$)．よって必要条件ではない．

したがって，③

(2)「$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$」は偽　(反例：$a=-2,\ b=1$)．よって十分条件ではない．

「$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$」は偽　(反例：$a=1,\ b=-2$)．よって必要条件ではない．

したがって，④

(3)　a が実数のとき　$a^2\geqq 0$（等号成立は　$a=0$ のとき）

同様に，$b^2\geqq 0$（等号成立は　$b=0$ のとき）

よって　$a^2+b^2\geqq 0$（等号成立は　$a=b=0$ のとき）

したがって，「$a^2+b^2=0 \iff a=b=0$」　ゆえに　①

(4)　$x^2\leqq 4$　より　$-2\leqq x\leqq 2$

$\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$　より　$-\frac{3}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}$　つまり　$-2<x<1$

「$x^2\leqq 4 \Longrightarrow \left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2}$」は偽　(反例：$x=-2$)．よって十分条件ではない．

「$\left|x+\frac{1}{2}\right|<\frac{3}{2} \Longrightarrow x^2\leqq 4$」は真．よって必要条件である．

したがって，②

(5)「$x+y,\ xy$ がともに有理数 $\Longrightarrow x,\ y$ がともに有理数」は偽

(反例：$x=3-\sqrt{2},\ y=3+\sqrt{2}$)．

よって十分条件ではない．

「$x,\ y$ がともに有理数 $\Longrightarrow x+y,\ xy$ がともに有理数」は明らかに真．

よって必要条件である．

したがって，②

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 (1) 整数 n について，n^2 が 3 の倍数であるならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ．

(2) $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ．ただし，(1)の結果を使ってよいものとする．

(1) 与えられた命題の対偶は，整数 n に関して

「n が 3 の倍数でないならば，n^2 は 3 の倍数ではない」である．

以下，k を整数とする．

$n=3k+1$ のとき　$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$n=3k+2$ のとき　$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ は整数であることより，$n=3k+1$，$3k+2$ のいずれの場合も

n^2 は 3 の倍数ではない．したがって対偶が真より，もとの命題も真である．

(2) $\sqrt{3}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると，

$\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$　（m，n は互いに素の自然数）と表される．

このとき，$\sqrt{3}\,m=n$　より　$3m^2=n^2$　……①

①の左辺は 3 の倍数より，右辺も 3 の倍数である．

よって(1)の結果から，n^2 が 3 の倍数より，n は 3 の倍数である．

したがって，$n=3k$（k：自然数）と表される．

このとき①より　$3m^2=(3k)^2$　であるから　$m^2=3k^2$

よって同様に m は 3 の倍数であることがわかる．

ゆえに，m と n は公約数 3 をもち，互いに素であることに矛盾する．

したがって背理法により，$\sqrt{3}$ は無理数である．

3 [1] 次の命題の真偽をそれぞれ調べよ．

(1) すべての実数 x について，$x^2-1>0$

(2) ある実数 x について，$x^2+x+1\leqq 0$

(1) $x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x^2-1=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}<0$ より　$x^2-1>0$ は成立しない．

したがって　**偽**.

(2) $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

よってすべての実数 x で $x^2+x+1>0$ より，$x^2+x+1\leqq 0$ となる実数 x は存在しない．

したがって　**偽**.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 ［2］　実数 x に関する式 $ax^2+bx+c=0$ がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ．

（必要条件）　$ax^2+bx+c=0$ がどんな x の値に対しても成り立つとき

$x=0$ で成り立つので　$c=0$　……①

$x=1$ で成り立つので　$a+b+c=0$　……②

$x=-1$ で成り立つので　$a-b+c=0$　……③

①～③より　$a=b=c=0$　これが必要条件である．

（十分条件）　$a=b=c=0$ のとき

$ax^2+bx+c=0\cdot x^2+0\cdot x+0$

よってどんな x の値に関しても $ax^2+bx+c=0$ が成り立つ．

ゆえに　$a=b=c=0$ は十分条件である．

以上より，$\boldsymbol{a=b=c=0}$　が求める必要十分条件である．

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　命題と証明

次の［　　］に最も適するものを下の選択肢①～④から1つ選べ．ただし，使われている文字はすべて実数とする．

(1)　$x<y$ は $cx<cy$ であるための［ア］．

(2)　$a>0$ は $\sqrt{a^2}=a$ が成り立つための［イ］．

(3)　$ab+1=a+b$ は a，b のうち少なくとも1つは1であるための［ウ］．

(4)　$a>0$ または $b>0$ であることは $a+b=1$ であるための［エ］．

①　必要十分条件である　　②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない　　④　必要条件でも十分条件でもない

(1)　（十分性）「$x<y \Longrightarrow cx<cy$」は　偽（反例：$x=1$，$y=2$，$c=-1$）．

（必要性）「$cx<cy \Longrightarrow x<y$」は　偽　（反例：$x=-1$，$y=-2$，$c=-1$）．

したがって，④（必要条件でも十分条件でもない）

(2)　（十分性）「$a>0 \Longrightarrow \sqrt{a^2}=a$」は　明らかに真．

（必要性）「$\sqrt{a^2}=a \Longrightarrow a>0$」は　偽（反例：$a=0$）．

したがって，③（十分条件であるが必要条件ではない）

(3)　$ab+1=a+b$　より　$ab-a-b+1=0$　　$(a-1)(b-1)=0$

よって　$a=1$　または　$b=1$

これは a，b のうち少なくとも1つは1であることと同値である．

したがって，①（必要十分条件である）

(4)　（十分性）「$a>0$ または $b>0 \Longrightarrow a+b=1$」は　偽（反例：$a=2$，$b=0$）．

（必要性）「$a+b=1 \Longrightarrow a>0$ または $b>0$」の対偶は，

「$a\leqq 0$ かつ $b\leqq 0 \Longrightarrow a+b\neq 1$」

$a\leqq 0$ かつ $b\leqq 0$ のとき $a+b\leqq 0$　より　$a+b=1$ となることはない．よって　真．

したがって，②（必要条件であるが十分条件ではない）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。